EINDVERSIE 12 februari 2007

Knik van een verend gesteunde kolom in een raamwerk

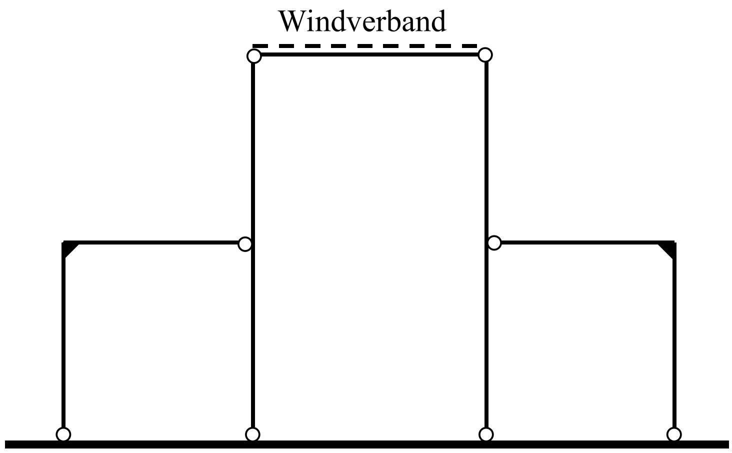
ir. J. Maljaars, ir. H.M.G.M. Steenbergen, dr. ir. M.C.M. Bakker, prof. ir. H.H. Snijder
Johan Maljaars en Henri Steenbergen zijn werkzaam bij TNO Bouw en Ondergrond. Monique Bakker, Johan Maljaars en Bert Snijder zijn verbonden aan de Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Bouwkunde, Unit Constructief Ontwerpen en Uitvoeringstechniek. Johan Maljaars, Henri Steenbergen en Bert Snijder zijn lid van de Technische Commissie 8, Stabiliteit, van Bouwen met Staal (BmS-TC8).

Inleiding

In bouwen met staal nummer 177 is in de rubriek Vraag en Antwoord een vraag behandeld over knikstabiliteit van een verend gesteunde kolom die deel uitmaken van een raamwerk [1]. De betreffende vraag 182 luidde:

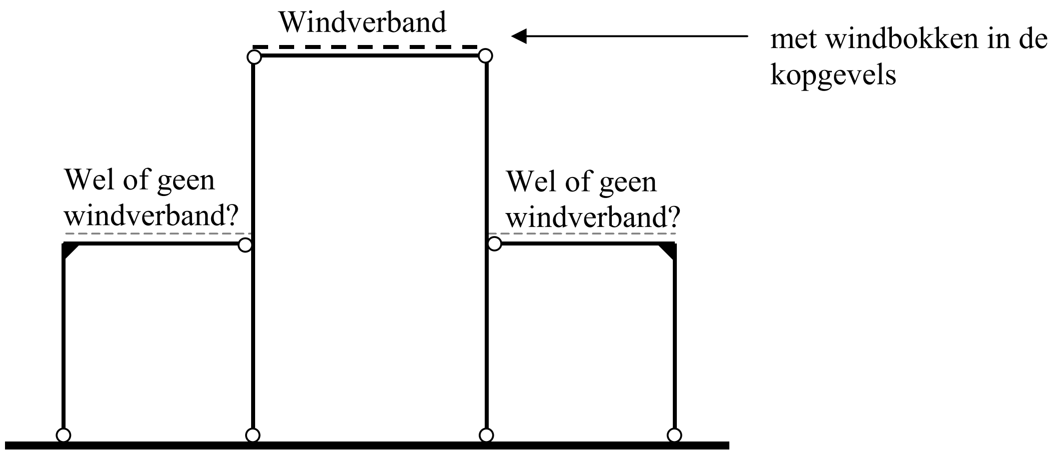
> *Een industriehal bestaat uit een hoge geschoorde middenbeuk met aan weerszijden een lagere zijbeuk. De kolommen van de hoge middenbeuk zijn te schematiseren tot een centrisch belaste kolom met op halve hoogte een verende ondersteuning (de lage zijbeuk). Hoe moet ik de bezwijkbelasting bepalen van de kolommen van de middenbeuk?*

De vraag werd in de publicatie toegelicht met figuur 1.



Figuur 1 – Raamwerk bestaande uit geschoorde middenbeuk en zijbeuken

In het antwoord is ingegaan op de eisen aan de sterkte en de stijfheid om de zijbeuken in rekening te kunnen brengen als (verende) ondersteuning of knikverkorter van de kolommen van de middenbeuk. Hierbij is impliciet verondersteld dat de zijbeuken (star of flexibel) geschoord zijn en de middenbeuk star geschoord, zoals weergegeven in figuur 2. In de schets die bij de vraag gevoegd was (figuur 1) is echter geen windverband of andere schoor aangegeven voor de zijbeuken.



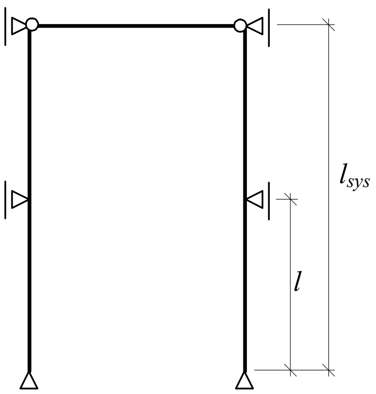
Figuur 2 – Raamwerk bestaande uit een star geschoorde middenbeuk en al dan niet geschoorde zijbeuken

Doordat schets en antwoord niet op elkaar aansloten heeft deze vraag veel verwarring opgeleverd. Het antwoord op deze vraag hangt namelijk in hoge mate af van de vraag of de zijbeuken geschoord zijn en hoe de verschillende schoren zijn uitgevoerd.

In de volgende paragrafen van dit artikel wordt uiteengezet wat de invloed van de zijbeuken op de stabiliteit van de gehele constructie is in het geval van star geschoorde zijbeuken of ongeschoorde zijbeuken. Bij star geschoorde zijbeuken is ervan uitgegaan dat de toegepaste windverbanden en de windbokken in de kopgevel voldoende stijf en sterk zijn om te kunnen functioneren als starre schoren. De zijbeuken vormen dan dus een volledig stijve steun voor de middenbeuk.

Geval 1: star geschoorde zijbeuken

Als de zijbeuken star geschoord zijn dan kan de toetsingsprocedure plaatsvinden volgens het antwoord gegeven bij vraag 182. Bij star geschoorde zijbeuken en een twee maal zo hoge middenbeuk als de zijbeuken, is de (elastisch effectieve) kniklengte van de kolom gelijk aan de halve systeemlengte ($l_k = 0{,}5l_{sys} = l$). In feite levert dit een systeem op zoals weergegeven in figuur 3 voor de kolommen van de middenbeuk.

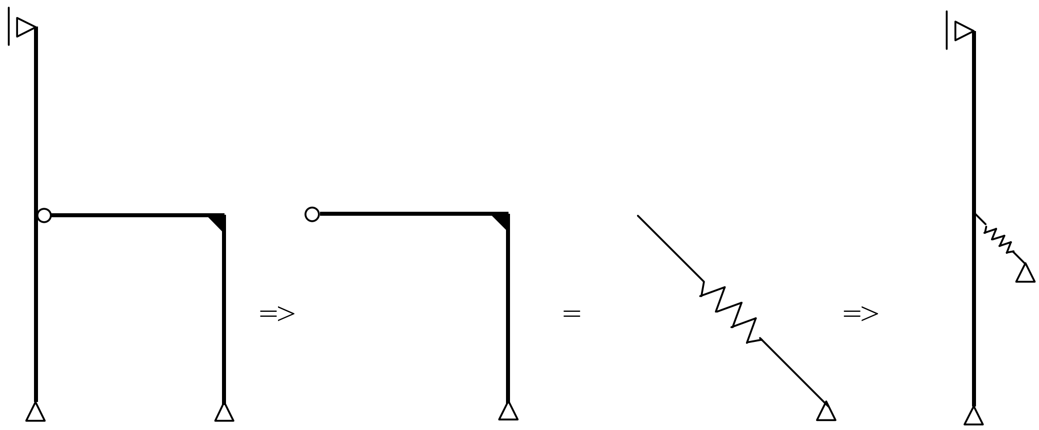


Figuur 3 – Systeem middenbeuk bij star geschoorde zijbeuken

Geval 2: ongeschoorde zijbeuken

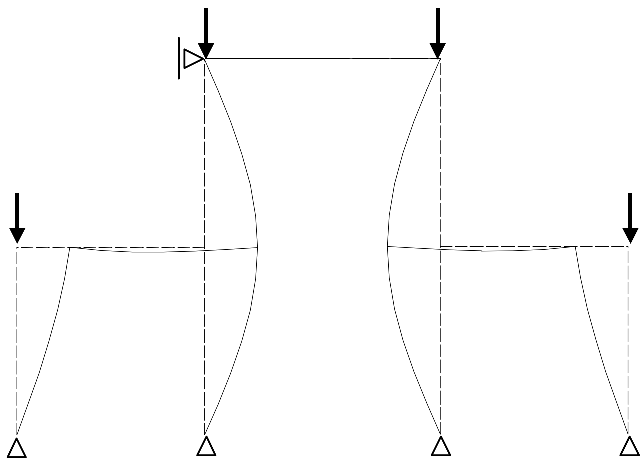
Zijn er geen windverbanden en windbokken aangebracht ter plaatse van de zijbeuken (figuur 2) dan zijn de zijbeuken ongeschoord. De zijbeuken oefenen dan op drie manieren invloed uit op de stabiliteit van de middenbeuk:

- Ten eerste kan de zijbeuk gezien worden als een onder een helling geplaatste veer. Dit is geïllustreerd in figuur 4. De normaalkrachtsverdeling in de kolom van de middenbeuk zal hierdoor beïnvloed worden door krachtsoverdracht naar de zijbeuk. Echter, omdat in het algemeen buigvervormingen groot zijn ten opzichte van vervorming door normaalkracht, zal de zijbeuk weinig normaalkracht naar zich toetrekken en kan de veer van figuur 4 horizontaal worden gemodelleerd. De stijfheid die de zijbeuk geeft, zorgt voor een verende ondersteuning van de kolom van de middenbeuk. Dit heeft een gunstige invloed op de kniklast van de kolom van de middenbeuk.
- Een belasting op het dak van de zijbeuk heeft daarentegen een ongunstige invloed op de normaalkrachtsverdeling in de kolom van de middenbeuk omdat een deel van de belasting naar de middenbeuk wordt afgedragen.
- Als laatste zal de middenbeuk zorg moeten dragen voor de stabiliteit van de zijbeuken. Zonder de middenbeuk zijn de zijbeuken kinematisch onbepaald en vallen ze om. De belasting op de zijbeuken heeft een ongunstige invloed op de kniklengte van de kolommen van de middenbeuk, omdat de zijbeuken als aanpendelende staven werken.



Figuur 4 – Invloed zijbeuk op normaalkracht kolom

Voor de toetsing moet in dit geval de kniklengte bepaald worden m.b.v. de Eulerse kniklast voor het gehele raamwerk. Dit is geïllustreerd in figuur 5.

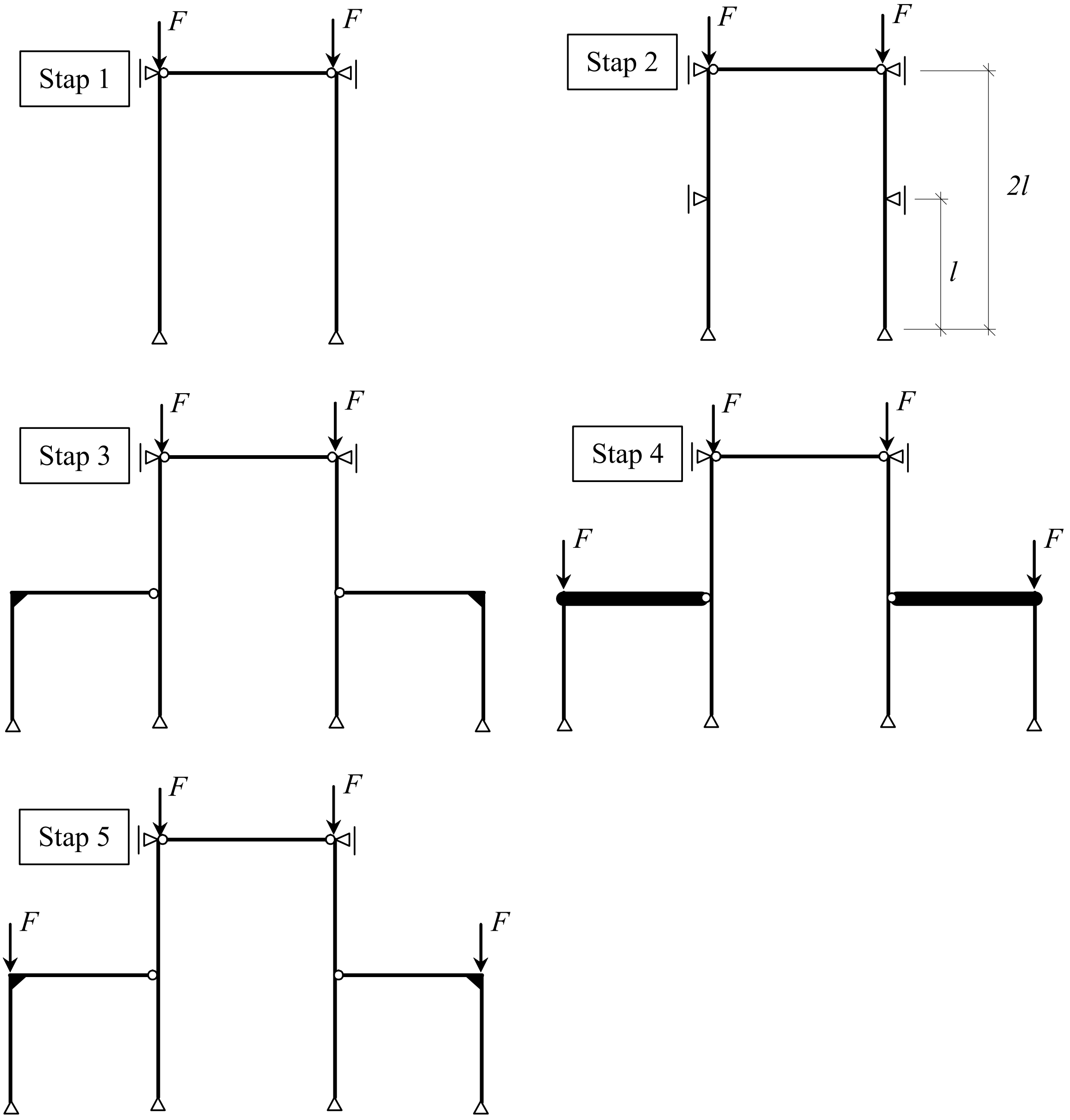


Figuur 5 – Eulerse knikvorm van het raamwerk met ongeschoorde zijbeuken

Voorbeeldberekening

De hiervoor genoemde gevallen en beschouwingen kunnen eenvoudig worden toegelicht aan de hand van een rekenvoorbeeld waarin in stappen nieuwe elementen worden toegevoegd. Van alle stappen zal in dit rekenvoorbeeld de Eulerse kniklast en de bijbehorende kniklengte worden bepaald met behulp van een handberekening en/of een computerberekening met de Eindige-Elementen-Methode (EEM).

In dit rekenvoorbeeld is de hoogte van de zijbeuken gelijk aan 4 m en de breedte is 4 m. De hoogte van de middenbeuk is 8 m en de breedte is 5 m. Voor alle liggers en kolommen zijn identieke HEB profielen gekozen. In de berekening is ervan uitgegaan dat puntlasten op de kolommen van de middenbeuk en de kolommen van de zijbeuk aangrijpen. Alle puntlasten zijn even groot. De analyse is opgebouwd in vijf stappen. Deze stappen zijn geïllustreerd in Figuur 6.



Figuur 6 – Beschouwde constructies in het voorbeeld

1. Als eerste is de Eulerse kniklast bepaald voor een raamwerk zonder zijbeuken. De Eulerse kniklast is in dit geval uiteraard gemakkelijk met een handberekening te bepalen. De knikvorm van deze stap en de volgende stappen is gegeven in figuur 7. De (effectieve) kniklengte (l_k) van de kolom is gelijk aan de systeemlengte:
   $l_k = l_{\text{sys}} = 2l = 8$ m

2. Ook bij het geval van een raamwerk met star geschoorde zijbeuken is de kniklengte eenvoudig met een handberekening te bepalen. De kniklengte van de kolom bedraagt:
   $l_k = 0{,}5 l_{\text{sys}} = l = 4$ m

3. Nu wordt een raamwerk beschouwd met ongeschoorde zijbeuken. Er grijpt enkel een puntlast F aan op de kolommen van de middenbeuk, terwijl de zijbeuken onbelast zijn.
   Het analytisch bepalen van de kniklengte is voor dit raamwerk tijdrovend en niet eenvoudig. In de praktijk zal men de Eulerse kniklast van een dergelijk raamwerk vaak bepalen met de Eindige-Elementen-Methode. Echter, een analytische berekening levert wel een goed inzicht op in het constructieve gedrag van het raamwerk. Voor dit raamwerk is de kniklengte zowel bepaald met de Eindige-Elementen-Methode als met analytische vergelijkingen (zie omkaderingen).

   Uit de Eindige-Elementenanalyse blijkt dat de normaalkracht (*N*) in het onderste deel van de kolom van de middenbeuk nagenoeg gelijk is aan de normaalkracht in het bovenste deel, namelijk 99,9 % van de puntlast (*F*). De diagonale veer in figuur 4 kan derhalve inderdaad geschematiseerd worden als een horizontale veer. Uit de Eindige-Elementenanalyse blijkt voor de normaalkracht en de kniklengten van het bovenste en onderste deel van de kolom te gelden:
   - bovenste deel kolom: $N = 1 \cdot F$ → $l_k = 7{,}172$ m $= 1{,}79\ l$
   - onderste deel kolom: $N = 0{,}999 \cdot F$ → $l_k = 7{,}175$ m $= 1{,}79\ l$

   Met de analytische bepaling, waarin in de afleiding reeds uitgegaan is van een horizontale veer, is bepaald dat de kniklengte gelijk is aan ('bijzonder geval' nr. 3):
   $l_k = 1{,}80\ l = 7{,}20$ m
   De kniklengte uit de analytische en EEM berekeningen komen goed overeen.
   Voor dit portaal geldt dus dat de kniklengte van de kolom van de middenbeuk kleiner is dan in geval van een portaal zonder zijbeuk en groter dan bij star geschoorde zijbeuken.

4. Op het raamwerk met ongeschoorde zijbeuken wordt vervolgens ook een puntlast aangebracht op de kolommen van de zijbeuken. Daarnaast worden de HEB profielen voor de liggers van de zijbeuken vervangen door oneindig stijve liggers. De kniklengte van de kolommen is nu weer eenvoudig met de hand af te leiden. Doordat de liggers niet kunnen vervormen en de zijbeuken half zo hoog zijn als de middenbeuk, zijn de kniklengten van de kolommen van de middenbeuk en de kolommen van de zijbeuk gelijk aan elkaar. Dit is geïllustreerd in figuur 8.
   Voor de kniklengte geldt:
   $l_k = l_{\text{sys}} = 2l = 8$ m;

5. Tenslotte wordt hetzelfde raamwerk beschouwd, met een puntlast aangrijpend op alle kolommen, waarbij voor de liggers van de zijbeuken weer het HEB profiel aangenomen is. Voor dit raamwerk is de kniklengte wederom bepaald met een Eindige-Elementenanalyse en met analytische vergelijkingen.

   Uit de EEM berekening blijkt, net als bij stap 3, dat de normaalkracht in het onderste deel van de kolom van de middenbeuk gelijk is aan de normaalkracht in het bovenste deel. Voor beide delen blijkt te gelden:

l_k = 8,57 m = 2,14 l

In de Eindige-Eelementenberekening wordt geen onderscheid gemaakt tussen knik van de middenbeuk en knik van de zijbeuk. Omdat de normaalkracht in de zijbeuk gelijk is aan de normaalkracht in de middenbeuk en ook de buigstijfheden van de kolommen gelijk zijn, geldt voor de kolom van de zijbeuk eveneens:

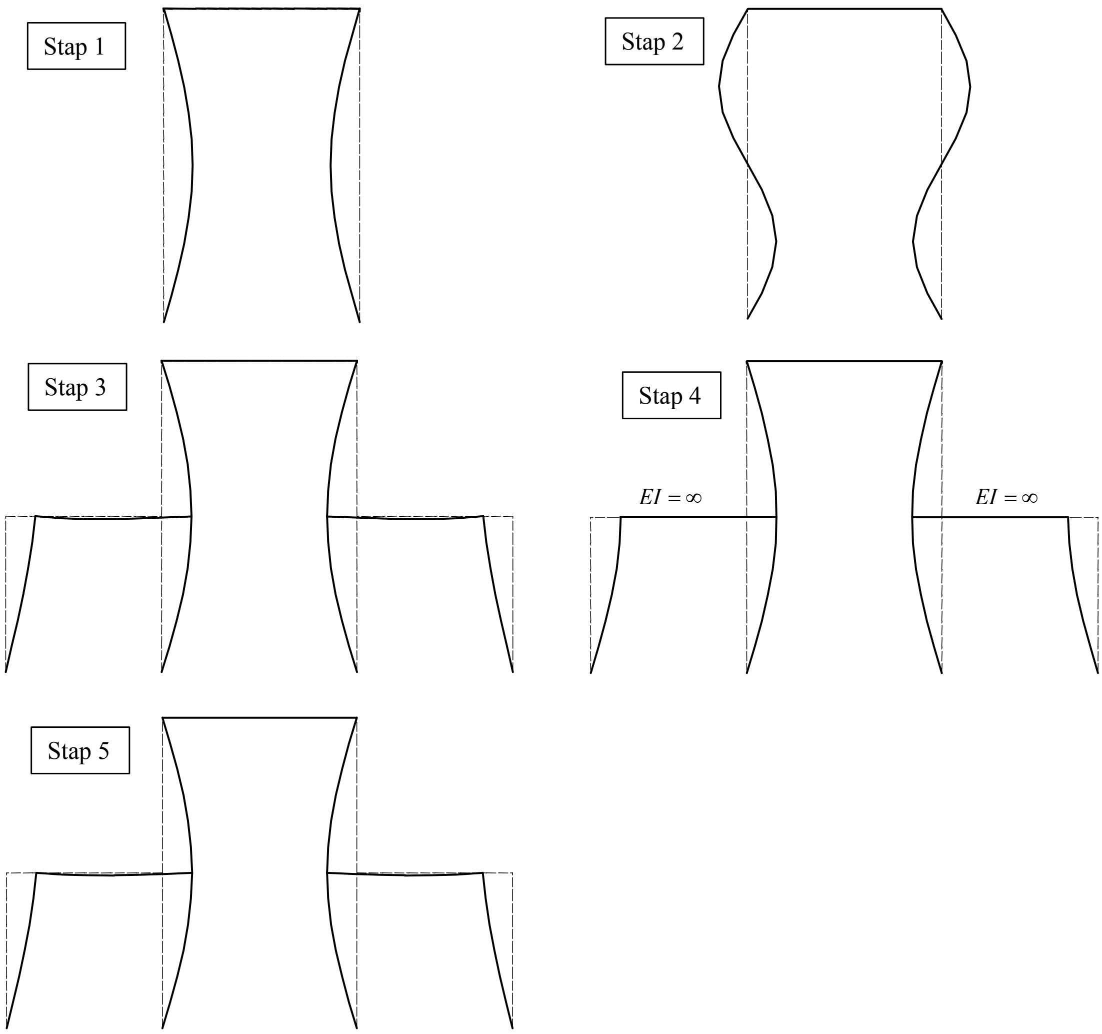
l_k = 8,57 m = 2,14 l

De analytische oplossing komt overeen met ‘bijzonder geval 5’ in de omkadering. De kniklengte is bepaald als:

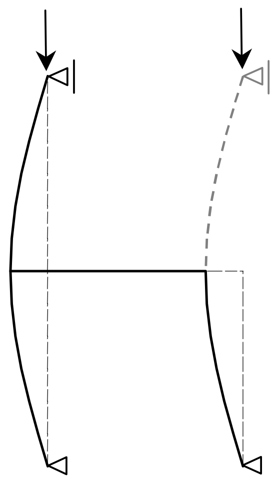
l_k = 2,16 l = 8,64 m

De EEM en analytisch bepaalde kniklengten komen wederom goed overeen.

Uit het voorbeeld blijkt dat, voor het beschouwde portaal, de kniklengte van de middenkolom nu ***groter*** is dan de systeemlengte. Dit wordt veroorzaakt door de aanpendelende belasting op de zijbeuken.



Figuur 7 – Knikvormen van de beschouwde constructies in het voorbeeld



Figuur 8 – Kniklengte van de kolommen voor constructie 4

Conclusies

Uit de analyse van het raamwerk kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

- Voor de bepaling van de kniklast van een meerbeukig raamwerk is het noodzakelijk om het hele raamwerk te beschouwen. Analyse van alle beuken afzonderlijk kan leiden tot een verkeerde kniklast als interactie tussen de beuken niet meegenomen wordt.
- De kniklengte van een meerbeukig raamwerk hangt af van de zijdelingse stijfheid van alle beuken en de belasting op alle beuken. Ten gevolge hiervan kan de knikbelasting van het hele raamwerk lager of hoger zijn dan de knikbelasting van een (geschoorde) kolom uit het raamwerk.
- Het schoren van alle beuken van een meerbeukig raamwerk levert een hogere kniklast op dan in geval van het schoren van slechts één beuk.
- Het bepalen van de knikbelasting van een raamwerk kan analytisch of met behulp van de Eindige-Elementen-Methode plaatsvinden. Hoe complexer het raamwerk, hoe aantrekkelijker de bepaling met de Eindige-Elementen-Methode.

Literatuur

[1] Vraag 182, Knik verende gesteunde kolom, rubriek Vraag en Antwoord, *Bouwen met Staal*, no. 77, april 2004, blz. 55.

[2] Dicke, D., *Stabiliteit voor ontwerpers*, Delftse Uitgevers Maatschappij, 1ste druk, 1991.

[3] Snijder, H.H., Kleinman, C.S., Schot, F., *Stabiliteit – materiaalgebonden*, Collegedictaat Mechanica 7b 7P770, Technische Universiteit Eindhoven, 2001

[4] Newmark, N.M., A simple approximate formula for effective end-fixety of columns, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol.16, No. 2, February 1949, p.116.

Bepalen van de kniklengte met de eindige-elementenmethode

De Eulerse kniklast van een kolom kan bepaald worden met behulp van vergelijking (a).

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{l_k^{\,2}} \qquad \text{(a)}$$

Ook voor een raamwerk kan de Eulerse kniklast bepaald worden. Hiervoor kan onder andere gebruik worden gemaakt van de Eindige-Elementen-Methode. In dit geval wordt bij een gegeven belasting een vermenigvuldigingsfactor λ bepaald. Deze geeft aan met welke factor de belasting moet worden vermenigvuldigd, zodat de belasting precies gelijk is aan de Eulerse kniklast. Voor een staaf geldt er dan:

$$F_E = \lambda\, N \qquad \text{(b)}$$

De kniklengte kan vervolgens voor iedere kolom bepaald worden met behulp van vergelijking (c). Deze vergelijking ontstaat door combinatie van vergelijkingen (a) en (b).

$$l_k = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{\lambda\, N}} \qquad \text{(c)}$$

Bij de toetsing van de staven is ook de vergrotingsfactor n / (n - 1) van belang, omdat hiermee de eerste orde elastische krachtsverdeling vermenigvuldigd moet worden. Indien de Eulerse kniklast is bepaald bij de rekenwaarde van de belasting (inclusief belastingsfactoren), dan is de factor n gelijk aan de vermenigvuldigingsfactor λ.

Bij de bepaling van de Eulerse kniklast en kniklengte met de EEM moet rekening gehouden worden met specifieke eigenschappen van deze methode. Bij de EEM worden namelijk alleen de knikvormen gevonden die kunnen worden beschreven met de vrijheidsgraden van de gekozen elementen. Verder zijn in verschillende EEM pakketten niet alle invloeden meegenomen. In de praktijk betekent dit bij de meeste programma's dat de kolommen en liggers geschematiseerd moeten worden met een voldoende aantal elementen. Vaak volstaat een keuze van minimaal 6 elementen per halve sinus van een uitgebogen staaf. Dit kan eenvoudig worden getest aan de hand van een testberekening op een pendelkolom.

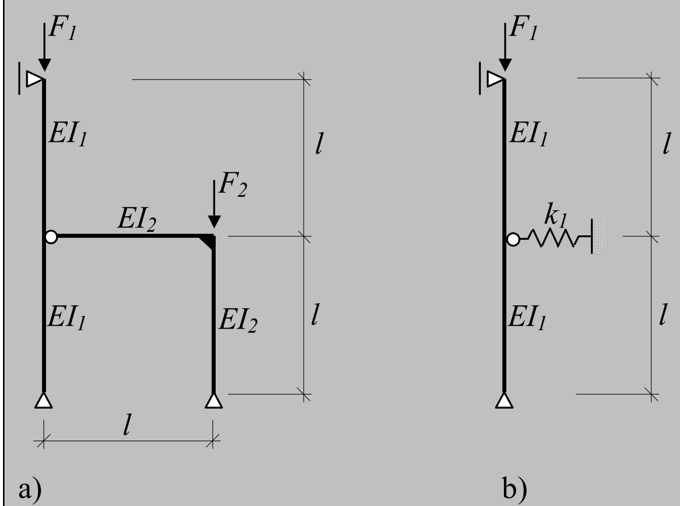
Bij een modellering met te weinig elementen gedraagt de constructie zich stijver dan hij in werkelijkheid is. Hierdoor zal een te hoge (onveilige) waarde van de Eulerse kniklast worden gevonden.
Soms kan men ook bewust van deze eigenschap gebruik maken bij de modellering. Bij een complexe raamwerkconstructie met veel pendelstaven is men vaak niet geïnteresseerd in de kniklast van de pendelstaven, maar wil men wel de kniklast van de totale constructie bepalen. In dergelijke gevallen kan men de pendelstaven schematiseren met slechts één element. Hierdoor wordt in de berekening niet de kniklast van de

pendelstaven gevonden, maar is de gevonden kniklast de kniklast van de complete raamwerkconstructie.

Analytische bepaling van de kniklengte

De kniklengte gebaseerd op systeemknik van het beschouwde raamwerk kan op twee manieren worden bepaald. Enerzijds door uit te gaan van de stabiliteit van de kolom van de middenbeuk; anderzijds door uit te gaan van stabiliteit van de kolom van de zijbeuk. In principe moeten beide manieren tot dezelfde resultaten leiden.

Stabiliteit kolom van de middenbeuk
Omdat in het algemeen buigvervormingen groot zijn ten opzichte van vervorming door normaalkracht, zal de zijbeuk weinig normaalkracht naar zich toetrekken en kan de veer van figuur 4 horizontaal worden gemodelleerd. We beschouwen de geschematiseerde constructie van figuur 9.



Figuur 9 – Schematisering kolom van de middenbeuk voor stabiliteit

De zijbeuk wordt geschematiseerd tot horizontale veer met veerstijfheid k_1: figuur 9b. Met NEN6771, art. 12.1.3.1 wordt voor de knikkracht van de verend gesteunde kolom gevonden:

$$F_{E1} = 1{,}875 \cdot 10^{-1} k_1 \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2} \qquad \ldots(1)$$

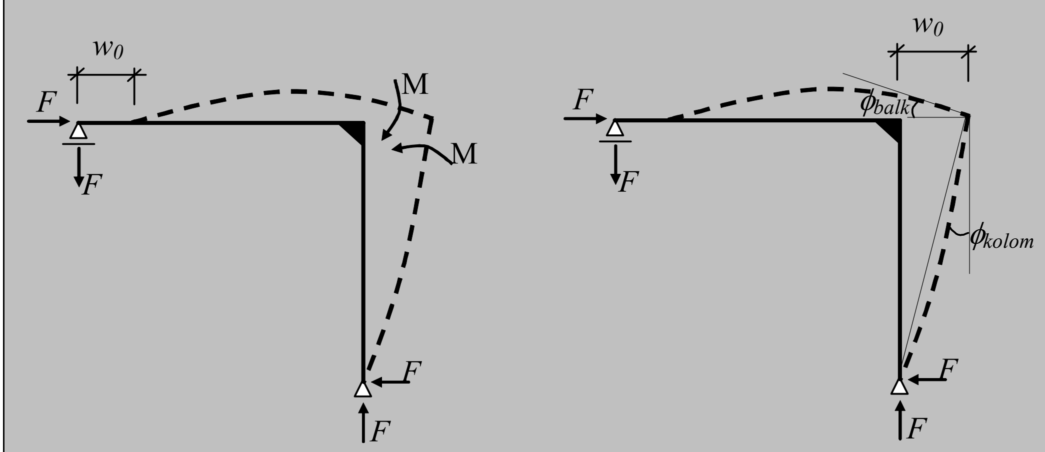
Als k_1 groot wordt dan wordt ook F_{E1} groot. Uiteraard is er een bovengrens, te weten de lokale knikvorm waarbij het midden van de kolom van de middenbeuk op zijn plek blijft: $l_k = l$ en:

$$F_{E1} = \frac{\pi^2 EI_1}{l^2} \qquad \ldots(2)$$

Formule (1) en (2) laten zich als volgt schrijven:

$$F_{E1} = 1{,}875 \cdot 10^{-1} k_1 \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2} \leq \frac{\pi^2 EI_1}{l^2} \qquad \ldots(3)$$

Alle grootheden zijn bekend behalve de veerconstante k_1 van de horizontale veer. Deze kan worden bepaald aan de hand van figuur 10, waarin alleen de zijbeuk is weergegeven. Er wordt bepaald hoe groot de zijdelingse verplaatsing w_0 is onder een horizontale puntlast F. In figuur 10 zijn de oplegreacties en de vervormingen weergegeven. In het hoekpunt zit een moment M.



Figuur 10 – Schematisering zijbeuk, ongeschoord

De rotatie van het balkuiteinde is dan:

$$\phi_{balk} = \frac{M\,l}{3EI_2} \qquad \ldots(4)$$

De rotatie van het kolomuiteinde is:

$$\phi_{kolom} = \frac{w_0}{l} - \frac{M\,l}{3EI_2} \qquad \ldots(5)$$

Deze rotaties moeten aan elkaar gelijk zijn, $\phi_{balk} = \phi_{kolom}$, en dus:

$$\frac{M\,l}{3EI_2} = \frac{w_0}{l} - \frac{M\,l}{3EI_2} \qquad \ldots(6)$$

Hieruit volgt met $M = F\,l$:

$$w_0 = \frac{2\,F\,l^3}{3EI_2} \qquad \ldots(7)$$

en dus:

$$k_1 = \frac{F}{w_0} = \frac{3EI_2}{2\,l^3} \qquad \ldots(8)$$

Bij deze bepaling van k_1 is voorbij gegaan aan het feit dat de kolom van de zijbeuk zelf onder druk staat. De afgeleide formule voor k_1 brengt 2^e orde effecten dan ook niet in rekening. De drukkracht in de kolom van de zijbeuk vergroot de verplaatsing w_0 tot een 2^e orde verplaatsing w waarvoor geldt:

$$w = \frac{n}{n-1} w_0 \quad \ldots(9)$$

Hierin is $\frac{n}{n-1}$ de vergrotingsfactor en $n = \frac{F_{E2,o}}{F_2}$ waarin F_2 de kracht is op de kolom in de zijbeuk en $F_{E2,0}$ de Eulerse kniklast van de kolom in de zijbeuk, die ongeschoord is.
Voor de 2^e orde veerstijfheid geldt dan:

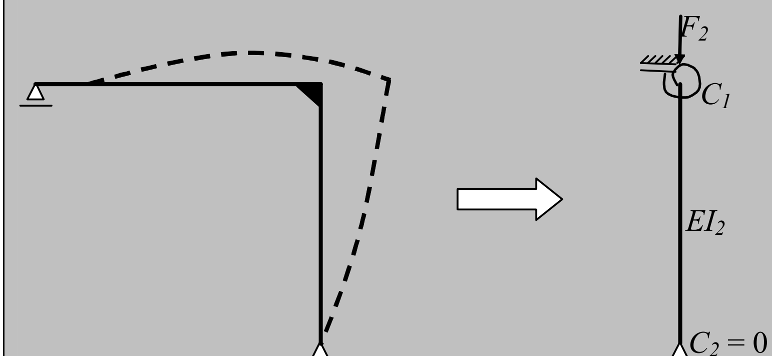
$$k_{1,2^e orde} = \frac{F}{w} = \frac{F}{\frac{n}{n-1} w_0} \quad \ldots(10)$$

en met de formule voor k_1 wordt dan gevonden:

$$k_{1,2^e orde} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) k_1 = \left(1 - \frac{F_2}{F_{E2,o}}\right) k_1 \quad \ldots(11)$$

Als er geen kracht op de kolom in de zijbeuk staat en dus $F_2 = 0$ dan geld dat 2^e orde effecten geen rol spelen en is $k_{1,2^e orde} = k_1$. Als de kracht op de kolom in de zijbeuk de theoretische waarde $F_2 = F_{E2,o}$ heeft dan kan de kolom van de zijbeuk geen steun leveren aan de kolom van de middenbeuk en is $k_{1,2^e orde} = 0$. Hoe groter de drukkracht in de kolom van de zijbeuk, hoe kleiner de steun is die de zijbeuk aan de kolom van de middenbeuk kan leveren. Indien $F_2 > F_{E2,o}$ wordt de veerstijfheid negatief, d.w.z. de zijbeuk hangt aan de middenbeuk, oftewel de middenbeuk steunt de zijbeuk. Omgekeerd, als $F_2 < F_{E2,o}$ dan is de veerstijfheid positief en steunt de zijbeuk de middenbeuk. Als $F_2 = F_{E2,o}$ dan is de veerstijfheid nul en is er geen steunverlenend effect van de zijbeuk.

Rest nog de bepaling van $F_{E2,o}$, de Eulerse kniklast van de kolom in de zijbeuk. Hiertoe schematiseren we de zijbeuk als aangegeven in figuur 11. De zijbeuk is een ongeschoord raamwerk.



Figuur 11 – Verdere schematisering zijbeuk, ongeschoord

Voor de rotatieveerstijfheid aan de kolomtop C_1 geldt met formule (4):

$$C_1 = \frac{M}{\phi_{balk}} = \frac{3EI_2}{l} \qquad \ldots(12)$$

Voor de inklemmingsparameter aan de top ρ_1 geldt dan:

$$\rho_1 = \frac{C_1 l}{EI_2} = 3 \qquad \ldots(13)$$

Voor de rotatieveerstijfheid aan de kolomvoet geldt $C_2 = 0$ (scharnier) en de inklemmingsparameter aan de voet is dan:

$$\rho_2 = 0 \qquad \ldots(14)$$

Voor de kniklengte van de kolom geldt de volgende formule [2,3]:

$$\left(\frac{l_k}{l}\right)^2 = \left(\frac{2\rho_1\rho_2 + 5\rho_1}{5\rho_1 + 5\rho_2 + 4\rho_1\rho_2}\right)^2 \left(\frac{10}{\rho_1 \dfrac{2\rho_1\rho_2 + 5\rho_1}{5\rho_1 + 5\rho_2 + 4\rho_1\rho_2}} + 4\right) \qquad \ldots(15)$$

Invullen van de formules (13) en (14) geeft:

$$\left(\frac{l_k}{l}\right)^2 = \left(\frac{15}{15}\right)^2 \left(\frac{10}{3\dfrac{15}{15}} + 4\right) = 7{,}33 \qquad \ldots(16)$$

Ofwel:

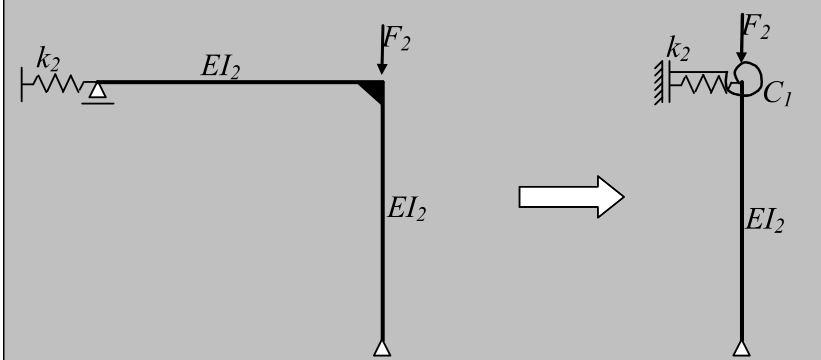
$$l_k = 2{,}71 l \qquad \ldots(17)$$

en dus:

$$F_{E2,o} = \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71 l)^2} \qquad \ldots(18)$$

Stabiliteit kolom van de zijbeuk

De schematisering van de kolom van de zijbeuk is weergegeven in figuur 12. Ook deze kolom kan onder een drukkracht instabiel worden. De kolom van de middenbeuk is nu tot een veer geschematiseerd met veerstijfheid k_2.

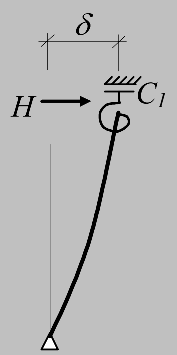


Figuur 12 – Schematisering zijbeuk voor stabiliteit, flexibel geschoord

We hebben hier te maken met een flexibel gesteunde kolom waarvoor geldt [2,3]:

$$F_{E2,f,s} = F_{E2,o}\left(1 + \delta\, k_2\right) \qquad \ldots(19)$$

Hierin is $F_{E2,o}$ de kniklast van het ongeschoorde systeem die wordt verkregen door de horizontale veer weg te laten, zie formule (18).
De verplaatsing δ is de verplaatsing van de ongeschoorde kolom (zonder translatieveer) ten gevolge van een eenheidsbelasting $H = 1$. Deze verplaatsing kan worden bepaald met behulp van figuur 13:



Figuur 13 – Bepaling δ

$$\delta = \frac{H\,l^3}{3EI_2} + \frac{H\,l^2}{C_1} = \frac{H\,l^3}{3EI_2} + \frac{H\,l^2\,l}{3EI_2} = \frac{2H\,l^3}{3EI_2} \qquad \ldots(20)$$

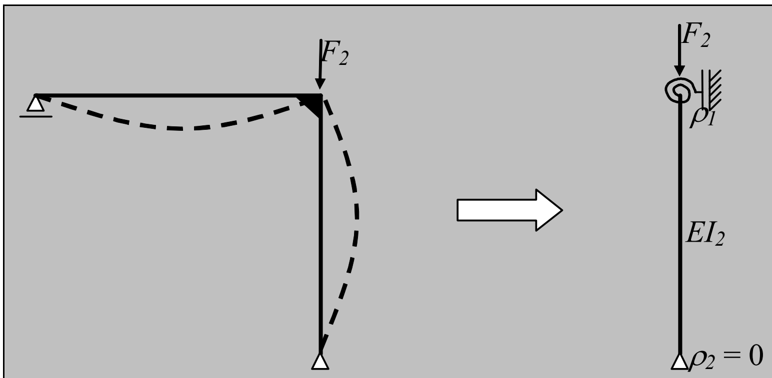
en met $H = 1$ volgt:

$$\delta = \frac{2\,l^3}{3EI_2} \qquad \ldots(21)$$

en dus geldt voor de kniklast van de kolom met formule (19):

$$F_{E2,f,s} = \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2}\left(1 + \frac{2l^3}{3EI_2}k_2\right) \qquad \ldots(22)$$

Deze kniklast geldt voor instabiliteit waarbij de kolom aan de top zijdelings uitknikt, zogenaamde systeeminstabiliteit. Als k_2 groot wordt, wordt ook de kniklast groot en is een andere knikvorm maatgevend. De kolom van de zijbeuk kan namelijk ook lokaal knikken, waarbij de top van de kolom op zijn plaats blijft (figuur 14); dit wordt partiële instabiliteit genoemd. De zijbeuk wordt dan als een geschoord raamwerk beschouwd.



Figuur 14 – Schematisering zijbeuk, geschoord

Newmark [2,3,4] heeft voor dit geval de volgende benaderingsformule afgeleid:

$$\frac{l_k}{l} = \sqrt{\frac{(5+\rho_1)(5+\rho_2)}{(5+2\rho_1)(5+2\rho_2)}} \qquad \ldots(23)$$

Voor de inklemmingsparameters ρ_1 en ρ_2 gelden weer de formules (13) en (14).
Invullen geeft:

$$\frac{l_k}{l} = \sqrt{\frac{8\cdot 5}{11\cdot 5}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = 0{,}85 \quad \text{ofwel} \quad l_k = 0{,}85l \qquad \ldots(24)$$

Voor partiële instabiliteit geldt dan:

$$F_{E2,f,p} = \frac{\pi^2 EI_2}{(0{,}85l)^2} \qquad \ldots(25)$$

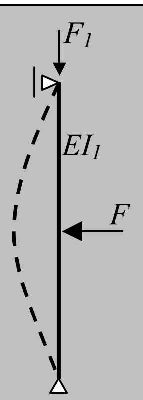
De kniklast van de kolom in de zijbeuk is dan de kniklast voor systeeminstabiliteit (formule (22)) maar nooit meer dan de kniklast voor partiële instabiliteit (formule (25)); in formulevorm:

$$F_{E2,f} = \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2}\left(1 + \frac{2l^3}{3EI_2}k_2\right) \le \frac{\pi^2 EI_2}{(0{,}85l)^2} \qquad \ldots(26)$$

Deze formule is te schrijven in het formaat van formule (3):

$$F_{E2,f} = 4{,}480\cdot 10^{-1}\cdot k_2 \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2} \le \frac{\pi^2 EI_2}{(0{,}85l)^2} \qquad \ldots(27)$$

Rest nog de bepaling van de veerstijfheid k_2. Daartoe wordt de kolom van de middenbeuk geschematiseerd als in figuur 15 weergegeven.



Figuur 15 – Schematisering kolom van de middenbeuk voor bepaling k_2

Er wordt weer bepaald hoe groot de zijdelingse verplaatsing w_0 is onder een horizontale puntlast F. Indien 2^e^ orde effecten buiten beschouwing blijven geldt:

$$w_0 = \frac{F(2l)^3}{48EI_1} \qquad \ldots(28)$$

en is

$$k_2 = \frac{F}{w_0} = \frac{6EI_1}{l^3} \qquad \ldots(29)$$

Analoog aan formule (11) geldt weer voor de 2^e^ orde veerstijfheid:

$$k_{2,2^e orde} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)k_2 = \left(1 - \frac{F_1}{F_{E1}}\right)k_2 \qquad \ldots(30)$$

met:

$$F_{E1} = \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2} \qquad \ldots(31)$$

Als er geen kracht op de kolom in de middenbeuk staat en dus $F_1 = 0$ dan geldt dat 2^e^ orde effecten geen rol spelen en is $k_{2,2^e orde} = k_2$. Als de kracht op de kolom in de middenbeuk de theoretische waarde $F_1 = F_{E1}$ heeft dan kan de kolom van de middenbeuk geen steun leveren aan de kolom van de middenbeuk en is $k_{2,2^e orde} = 0$. Hoe groter de drukkracht in de kolom van de middenbeuk, hoe kleiner de steun is die de middenbeuk aan de kolom van de zijbeuk kan leveren. . Indien $F_1 > F_{E1}$ wordt de veerstijfheid negatief, d.w.z. de middenbeuk hangt aan zijbeuk, oftewel de zijbeuk steunt de middenbeuk. Omgekeerd, als $F_1 < F_{E1}$ dan is de veerstijfheid positief en steunt de middenbeuk de zijbeuk. Als $F_2 = F_{E2,o}$ dan is de veerstijfheid nul en is er geen steunverlenend effect van de middenbeuk.

Samenvatting

Als wordt uitgegaan van knik van de kolom van de middenbeuk dan geldt formule (3):

$$F_{E1} = 1{,}875 \cdot 10^{-1} k_1 \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2} \leq \frac{\pi^2 EI_1}{l^2} \qquad \ldots(32)$$

met voor k_1 de formules (11) met (8) en (18):

$$k_1 = \left(1 - \frac{F_2 (2{,}71l)^2}{\pi^2 EI_2}\right) \frac{3EI_2}{2l^3} \qquad \ldots(33)$$

De zijbeuk steunt de middenbeuk als $F_2 < \dfrac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2}$.

Als wordt uitgegaan van knik van de kolom van de zijbeuk dan geldt formule (27):

$$F_{E2} = 4{,}480 \cdot 10^{-1} \cdot k_2 \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2} \leq \frac{\pi^2 EI_2}{(0{,}85l)^2} \qquad \ldots(34)$$

met voor k_2 de formules (30) met (29) en (31):

$$k_2 = \left(1 - \frac{F_1 (2l)^2}{\pi^2 EI_1}\right) \frac{6EI_1}{l^3} \qquad \ldots(35)$$

De middenbeuk steunt de zijbeuk als $F_1 < \dfrac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2}$.

Bijzondere gevallen

De volgende bijzondere gevallen worden beschouwd:

1. Als de belasting op de kolommen gelijk is, dus $F_1 = F_2$ en ze tegelijkertijd knikken dan geldt $F_1 = F_{E1}$ en $F_2 = F_{E2}$ en dus $k_1 = k_2 = 0$ en dus reduceren de formules (32) en (34). Gelijkstellen levert:
   $$\frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2}$$
   ofwel dit gebeurt als:
   $$EI_2 = 1{,}84 EI_1$$

2. Als de belasting op de kolommen niet gelijk is maar de kolommen knikken wel tegelijkertijd, dus $F_1 = F_{E1}$ en $F_2 = F_{E2}$ en dus $k_1 = k_2 = 0$ dan geldt:
   $$F_1 = F_{E1} = \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2}$$
   $$F_2 = F_{E2} = \frac{\pi^2 EI_2}{(2{,}71l)^2}$$
   Als de stijfheden van alle kolommen en liggers gelijk zijn, dus $EI_1 = EI_2$, dan is de verhouding van de belastingen gelijk aan:
   $$F_2 = 0{,}545 F_1$$

3. Als $F_2 = 0$ kan de zijbeuk maximale steun leveren aan de middenbeuk en is $k_1 = \frac{3EI_2}{2l^3}$. De kniklast van de kolom van de middenbeuk is dan:

$$F_{E1} = 1{,}875 \cdot 10^{-1} \frac{3EI_2}{2l^3} \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_1}{(2l)^2}$$

Als nu ook nog geldt $EI_1 = EI_2 = EI$ dan volgt:

$$F_{E1} = \frac{\pi^2 EI}{(1{,}80l)^2}$$

4. Als $F_1 = 0$ kan de middenbeuk maximale steun leveren aan de zijbeuk en is $k_2 = \frac{6EI_1}{l^3}$. De kniklast van de kolom van de zijbeuk is dan:

$$F_{E2} = 4{,}480 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{6EI_1}{l^3} \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI_2}{\left(2{,}71l\right)^2}$$

Als nu ook nog geldt $EI_1 = EI_2 = EI$ dan volgt:

$$F_{E2} = \frac{\pi^2 EI}{(1{,}21l)^2}$$

5. Als $F_1 = F_2 = F$ en tevens $EI_1 = EI_2 = EI$ dan kan de kniklast van het raamwerk bepaald worden door uit te gaan van de stabiliteit van de kolom van de middenbeuk of door uit te gaan van de stabiliteit van de kolom van de zijbeuk.

   - Als wordt uitgegaan van knik van de kolom van de middenbeuk geldt:

     $$F_{E1} = 1{,}875 \cdot 10^{-1} \left(1 - \frac{F\left(2{,}71l\right)^2}{\pi^2 EI}\right) \frac{3EI}{2l^3} \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

     ofwel:

     $$F_{E1} = 3{,}0299 \frac{EI}{l^2} - 0{,}41856F$$

     Het raamwerk wordt instabiel als $F = F_{E1}$. De elastisch kritische kniklast van zowel de kolom van de middenbeuk als de kolom van de zijbeuk is derhalve gelijk aan $F_{E1} = 2{,}14 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{\left(2{,}15l\right)^2}$.

     De zijbeuk steunt de middenbeuk als $F_2 < \frac{\pi^2 EI_2}{\left(2{,}71l\right)^2}$.

     Omdat bij knik geldt $F_1 = F_2 = \frac{\pi^2 EI}{\left(2{,}15l\right)^2}$ wordt niet aan deze eis voldaan en dus steunt de middenbeuk de zijbeuk.

   - Als wordt uitgegaan van knik van de kolom van de zijbeuk geldt:

$$F_{E2} = 4,480 \cdot 10^{-1} \left(1 - \frac{F\left(2l\right)^2}{\pi^2 EI} \right) \frac{6EI}{l^3} \cdot 2l + \frac{\pi^2 EI}{\left(2,71l\right)^2}$$

ofwel:

$$F_{E2} = 6,7199 \frac{EI}{l^2} - 2,1788F$$

Het raamwerk wordt instabiel als $F = F_{E2}$. De elastisch kritische kniklast van zowel de kolom in de zijbeuk als de kolom van de middenkolom is derhalve gelijk aan $F_{E2} = 2,11 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{\left(2,16l\right)^2}$.

De middenbeuk steunt de zijbeuk als $F_1 < \frac{\pi^2 EI_1}{\left(2l\right)^2}$.

Omdat bij knik geldt $F_1 = F_2 = \frac{\pi^2 EI}{\left(2,16l\right)^2}$ wordt aan deze eis voldaan en dus steunt de middenbeuk de zijbeuk.

De belasting waarbij het raamwerk uitknikt is voor beide berekeningen inderdaad nagenoeg gelijk. Als veilige waarde wordt de laagste kniklast als maatgevend aangehouden: $F_E = 2,11 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{\left(2,16l\right)^2}$.

Uit beide berekeningen blijkt dat bij knik van het raamwerk de middenbeuk de zijbeuk steunt.